

Problemas resueltos de Cálculo I

Sergio Cruz Blázquez sergio.cruz@uam.es

Tema 1: Los números reales

5a) Demostrar que $2^n > n^2$ para todo $n \geq 5$.

Lo hacemos por inducción. Etapa base: $n=5$ $2^5 = 32 > 5^2 = 25$ ✓

Paso inductivo: suponemos que $2^n > n^2 \forall n \geq 5$, y queremos ver que $2^{n+1} > (n+1)^2$. Razonamos como sigue:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < 2^n + 2n + 1 \quad \begin{array}{l} \text{hipótesis de ind.} \\ \text{factor común } 2^n \end{array} = 2^n \left(1 + \frac{2n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right) = (*)$$

Puesto que $2^n > n^2$, entonces $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n^2}$, y de ahí se sigue que

$$(*) = 2^n \left(1 + \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) = 2^n \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right).$$

De igual forma, como $n \geq 5$, entonces $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{5}$, y nos queda:

$$2^n \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \leq 2^n \underbrace{\left(1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{25} \right)}_{< 2} < 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

4c) Probar que $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1}$, para $n \geq 2$

Por comodidad, resumimos $P(n)$ usando sumatorios:

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Date cuenta; hacemos inducción sobre n , no k !

Etapas base: $n=2$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=2}^3 \frac{1}{k} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \\ \sum_{k=1}^3 \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \end{aligned} \right\} \checkmark$$

Paso inductivo: Suponemos que $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, y buscamos

llegar a que

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Vamos a partir de esta

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \\ &= \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}}_{\text{añadimos lo que necesitamos}} - \underbrace{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}}_{\text{lo restamos para que quede igual}} + \frac{1}{2n+1} = \end{aligned}$$

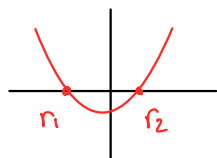
$$\begin{aligned} &= \sum_{k=n}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \text{sacamos el } n\text{-ésimo término del sumatorio} \end{aligned}$$

2c) Encontrar los valores de x que satisfacen: $|x^2 - 5x + 6| < 2$.

Como $2 > 0$, podemos usar la propiedad $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, y resolver:

$$-2 < x^2 - 5x + 6 < 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} -2 < x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 8 > 0 \\ x^2 - 5x + 6 < 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \end{array} \right.$$

(dos desigualdades)



$ax^2 + bx + c$, $a > 0$
positivo en $]-\infty, r_1[\cup]r_2, +\infty[$
negativo en $]r_1, r_2[$

$x^2 - 5x + 8$ no tiene raíces reales, así que es siempre positivo, la 1ª ecuación se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 4. \text{ Entonces, } x^2 - 5x + 4 < 0 \Leftrightarrow x \in]1, 4[.$$

2b) $|x+1| \leq |x-1|$. No elevamos al cuadrado, es más fácil distinguir casos:

Si $x < -1$, $-x-1 \leq -x+1 \Leftrightarrow -1 \leq 1$ Se cumple siempre

Si $-1 \leq x \leq 1$, $x+1 \leq -x+1 \Leftrightarrow 2x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

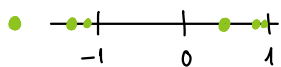
Los puntos $x \in [-1, 0]$ satisfacen la ecuación.

Si $x > 1$, $x+1 < x-1 \Rightarrow 1 < -1$, no se verifica nunca.

Juntando toda la información: $x \in]-\infty, 0]$.

8d) Decidir si el conjunto $\{(-1)^n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado y calcular, si existen, su supremo y su infimo. (A)

Vemos cómo son los puntos del conjunto A: $\{-2, \frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$



Esto nos hace pensar que A es acotado, su infimo es -2 y su supremo es 1.

Por un lado; $n \geq 1 \Rightarrow 1/n \leq 1 \Rightarrow -1/n \geq -1$. Esto nos da

$$(-1)^n - \frac{1}{n} \geq -1 - 1 = -2.$$

Como $-2 \in A$ y es una cota inferior, tenemos que $-2 = \min A$.

Veamos ahora que $1 = \sup A$. Empezamos viendo que 1 es una cota superior:

$$(-1)^n - 1/n \leq 1 - 1/n \leq 1$$

Ahora, comprobamos que $\forall \varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 - \varepsilon \leq (-1)^n - 1/n \leq 1$$

Por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 \leq \varepsilon$, lo que nos da $1 - \varepsilon \leq (-1)^{n_0} - 1/n_0$. Si tomamos $n_1 \in \mathbb{N}$ como un natural par $\geq n_0$, tenemos

$$1 - \varepsilon \leq (-1)^{n_1} - 1/n_1 = 1 - 1/n_1 \leq 1,$$

como queríamos.

$$7a) \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\} = \left\{ \frac{n-1}{n} : n \geq 2 \right\} = \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \geq 2 \right\} = A.$$

Mayorado: $1 - \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces A está mayorado.

Minorado. $n \geq 2 \Rightarrow 1/n \leq 1/2 \Rightarrow -1/n \geq -1/2 \Rightarrow 1 - 1/n \geq 1 - 1/2 = 1/2$.

Como $1/2$ es una cota inferior y $1/2 \in A \Rightarrow \min A = 1/2$.

Veamos ahora que $\sup A = 1$, pero no es un máximo ($1 \notin A$).

Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $a \in A$ ($1 - 1/n$ con $n \geq 2$) tal que

$$1 - \varepsilon \leq 1 - 1/n \leq 1. \quad (-\varepsilon \leq -1/n \Rightarrow \varepsilon \geq 1/n \Rightarrow 1/\varepsilon \leq n)$$

Tomamos $n \geq \max\{2, 1/\varepsilon\}$, y vemos que se tiene

$$n > 1/\varepsilon \Rightarrow 1/n \leq \varepsilon \Rightarrow -1/n \geq -\varepsilon \Rightarrow \underbrace{1 - 1/n}_{\in A} \geq 1 - \varepsilon$$

Tema 2: Sucesiones de números reales

Ejercicio 6 a) $\left\{ \frac{1}{n!} \right\}$ Tenemos que $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \geq n$, lo que nos da:

$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ por lo que } \left\{ \frac{1}{n!} \right\} \rightarrow 0.$$

b) $\left\{ \frac{2 \cos(3n) + 5 \sin(n^2)}{n+1} \right\}$. Tomamos valor absoluto:

$$0 \leq \frac{|2 \cos(3n) + 5 \sin(n^2)|}{n+1} \leq \frac{2|\cos(3n)| + 5|\sin(n^2)|}{n+1} \leq \frac{7}{n+1} \rightarrow 0$$

$$\text{Entonces, } \left\{ \frac{2 \cos(3n) + 5 \sin(n^2)}{n+1} \right\} \rightarrow 0.$$

c) $\left\{ \frac{(-1)^{n+1} + 2^{-n} + \cos(n!)}{\sqrt{n}} \right\}$ Tomamos valor absoluto:

$$0 \leq \left| \frac{(-1)^n + 2^{-n} + \cos(n!)}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{2 + 2^{-n}}{\sqrt{n}} = \frac{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{n}} \leq \frac{5/2}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

→ Sucesión decreciente, la podemos acotar por el primer término

$$\text{Por tanto } \left\{ \frac{(-1)^{n+1} + 2^{-n} + \cos(n!)}{\sqrt{n}} \right\} \rightarrow 0$$

$$7c) \sqrt{n^2+1} - n = \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{n^2+1 - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

$$\sqrt{n^2+1} \rightarrow +\infty \text{ (porción de } \sqrt{n}) \text{ y } n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \rightarrow 0.$$

$$7d) \underbrace{n \sqrt{n^2+1} - n^2}_{\text{Racionalizamos}} = \frac{n^2(n^2+1) - n^4}{n\sqrt{n^2+1} + n^2} = \frac{n^2}{n\sqrt{n^2+1} + n^2} = \text{dividimos por } n^2 \text{ numerador y denominador}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \rightarrow 1/2$$

$$7f) \quad a_n = \frac{6^n}{5^n + (-6)^n} = \frac{1}{\frac{5}{6} + (-1)^n} \cdot \frac{1}{6^n}$$

$$a_{2n} = \frac{1}{1 + (\frac{5}{6})^{2n}} \rightarrow 1$$

$$a_{2n-1} = \frac{1}{(\frac{5}{6})^n - 1} \rightarrow -1$$

La sucesión no converge, ya que tiene dos subsucesiones que convergen a distintos límites.

8a) Lo hacemos de dos formas:

$$\begin{aligned} \text{Por un lado, } \sqrt[n]{2n^3} &= e^{\frac{1}{n} \log(2n^3)} = e^{\frac{1}{n} \log 2 + \frac{3}{n} \log n} = \\ &= e^{\frac{\log 2}{n}} e^{\frac{3 \log n}{n}} \rightarrow e^0 \cdot e^0 = 1. \end{aligned}$$

Alternativamente, si $\{a_n\} = 2n^3$, vemos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)^3}{2n^3} \rightarrow 1$,
luego $\sqrt[n]{2n^3} \rightarrow 1$ por el criterio de la raíz.

8f) Llamamos $a_n = \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$ ($\rightarrow 1$) y $b_n = n$

Estudiamos la sucesión $b_n(a_n - 1) = n \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 2 + \frac{1}{n} \rightarrow 2$,
luego $a_n^{b_n} \rightarrow e^2$

10. a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_n = a_n + b_n \leq \underbrace{A+B}_{\text{no depende de } n} \Rightarrow A+B$ es una

cota superior de $\{C_n\} \Rightarrow C \leq A+B$ (C es la menor cota superior).

b) Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son crecientes $\Rightarrow \{a_n\} \rightarrow A$ y $\{b_n\} \rightarrow B$

Pero entonces $\{c_n\}$ también es creciente $\Rightarrow \{c_n\} \rightarrow C$

$$(c_n = a_n + b_n \leq a_{n+1} + b_{n+1} = c_{n+1})$$

Por las propiedades y la unicidad del límite,

$$C \leftarrow \{c_n\} = \{a_n + b_n\} \rightarrow A + B \Rightarrow A + B = C.$$

c) Falso, $\{a_n\} = (-1)^n$ $\sup a_n = 1$
 $\{b_n\} = (-1)^{n+1}$ $\sup b_n = 1$
 $\{a_n + b_n\} = \{0\}$ $\sup c_n = 0.$

13. $a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = \frac{3}{2}a_{n-1} - \frac{1}{2}a_{n-2}$ para cada $n \geq 2$.

a) Demostremos por inducción que $\{a_n\}$ es creciente de la siguiente manera:

Etapas base: $a_0 < a_1$ ($1 < 2$ ✓)

Paso inductivo: Suponiendo que $a_{n-1} < a_n$ para algún n , probemos que $a_n < a_{n+1}$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{2}a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) > 0$$

b) Comprobemos ahora que $a_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hacemos una inducción empezando en $n = 2$:

Etapas base: $a_0 = 1 < 3, a_1 = 2 < 3, a_2 = \frac{5}{2} < 3$. ✓

Paso inductivo: Suponiendo que $a_n < 3$ para algún $n \geq 2$, veamos que $a_{n+1} < 3$.

$$a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} < \frac{9}{2} - \frac{1}{2}a_{n-1}$$

Como $\{a_n\}$ es creciente, $a_{n-1} \geq a_1 = 2 \quad \forall n \geq 2$, por lo que $-a_n \leq 2$. Esto nos da:

$$a_{n+1} < \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{7}{2} (= 3.5)$$

No importa cuanto aumentemos la etapa base, siempre nos da una cota estrictamente mayor a 3...

(Es fácil demostrar otras cotas como que $a_n < 5$, pero calcular el límite es muy complicado usando la ley de recurrencia).

12. Sea $1 < t \leq 4$, y sea $\{x_n\}$ la sucesión definida mediante

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{t}{x_n} \right) = \frac{1}{2} \frac{x_n^2 + t}{x_n}$$

a) $\sqrt{t} \leq x_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Empezamos con la cota superior:

Lo hacemos por inducción, teniendo en cuenta que

Etapla base: $\sqrt{t} \leq \sqrt{4} = 2 = x_1 \leq 2$ ✓

Paso inductivo: Supongamos que $\sqrt{t} \leq x_n \leq 2$ para algún $n \in \mathbb{N}$, y comprobemos que $\sqrt{t} \leq x_{n+1} \leq 2$.

Por un lado, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{t}{2x_n} \leq 1 + \frac{t}{2\sqrt{t}} = 1 + \frac{\sqrt{t}}{2} \leq 2$.

Por otro lado, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{t}{2x_n} \geq \frac{\sqrt{t}}{2} + \frac{t}{4} \geq \frac{\sqrt{t}}{2} + \frac{\sqrt{t}}{2} = \sqrt{t}$,

donde hemos usado que $1 < t \Rightarrow t < t^2 \Rightarrow \sqrt{t} < t$.

Alternativamente, podemos usar que $(a+b)^2 \geq 4ab$ para tener que

$$x_{n+1}^2 = \frac{1}{4} \left(x_n + \frac{t}{x_n} \right)^2 \geq t \Rightarrow x_{n+1} \geq \sqrt{t},$$

y demostrar la continuación que $x_{n+1} \leq 2$ usando esa información.

Veamos ahora que $\{x_n\}$ es decreciente ($x_{n+1} \leq x_n \forall n \in \mathbb{N}$). Para esto, basta tener en cuenta que $0 < \sqrt{t} < x_n \Rightarrow t < x_n^2$.

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{t}{x_n} \right) \leq \frac{1}{2} (x_n + x_n) = x_n.$$

Como $\{x_n\}$ está minorada y es decreciente, entonces $\{x_n\} \rightarrow L$.

Pasando al límite la identidad $x_{n+1} = \left(x_n + \frac{t}{x_n} \right)$ tenemos

$$2L = L + \frac{t}{L} \Rightarrow L^2 = t \Rightarrow L = \sqrt{t}, \text{ o } L = -\sqrt{t}.$$

Como teníamos $x_n \geq \sqrt{t} \forall n \in \mathbb{N}$, ha de tenerse necesariamente

$$L = \sqrt{t}$$

Tema 3 Series de números reales

2a) $\sum_{n \geq 2} x_n, \quad x_n = \log \frac{n}{n+1}$

$$x_n = \log \frac{n}{n+1} = \log n - \log(n+1) = -\log(n+1) - (-\log n)$$

$$\text{Entonces } \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n (-\log(k+1) - (-\log k)) = -\log(n+1).$$

$$\text{Por tanto, } \sum_{n \geq 1} \log \frac{n}{n+1} \longrightarrow -\infty.$$

2b) $\sum_{n \geq 1} x_n, \quad x_n = \frac{1}{n(n+2)}. \quad x_n = \frac{1/2}{n} + \frac{-1/2}{n+2} = \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} \right)$

$$\text{Entonces, } \sum_{k=1}^n x_k = \frac{-1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k} \right) = \frac{-1}{2} \sum_{k=1}^n (y_{k+2} - y_k),$$

siendo

$$y_k = \frac{1}{k} \quad \forall k \geq 1.$$

Vemos que
$$\sum_{k=1}^n (y_{k+2} - y_k) = y_3 - y_1 + y_4 - y_2 + y_5 - y_3 + \dots + y_{n+1} - y_{n-1} + y_{n+2} - y_n = y_{n+2} + y_{n+1} - y_1 - y_2.$$

Entonces,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+2)} = \left\{ \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{2} \right) \right\} \rightarrow \frac{3}{4}.$$

5d) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n} - 1}{3n^2 + 4}$ Observamos que el término general

Asintótico (comportamiento parecido en ∞)

$$a_n = \frac{\sqrt{n} - 1}{3n^2 + 4} \sim \frac{1}{n^{3/2}},$$

así que vamos a usar el criterio de comparación por paso al límite con $b_n = 1/n^{3/2}$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(\sqrt{n} - 1) n^{3/2}}{3n^2 + 4} = \frac{n^2 - n^{3/2}}{3n^2 + 4} \rightarrow 1/3.$$

Por el criterio de comparación por paso al límite, $\sum_{n \geq 1} x_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} 1/n^{3/2}$ converge, que sí lo hace porque $3/2 > 1$.

7a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha(n+1)}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

Llamamos $a_n = \frac{1}{n^\alpha(n+1)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Claramente $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

Comparamos con la serie $\sum_{n \geq 1} b_n$, $b_n = \frac{1}{n^{\alpha+1}} > 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1} + n^\alpha} = \frac{1}{1 + 1/n} \rightarrow 1.$$

Por el criterio de comparación por paso al límite,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha(n+1)} \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \text{ converge } \Leftrightarrow 1+\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0.$$

$$7b) \sum_{n \geq 1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha = \sum_{n \geq 1} \frac{((\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}))^\alpha}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^\alpha} =$$

$$= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^\alpha} \quad a_n \quad \text{Comparamos con} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha/2}} \quad b_n$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{\alpha/2}}{((n+1)^{1/2} + n^{1/2})^\alpha} = \frac{1}{\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/2} + 1\right)^\alpha} \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha > 0$$

Entonces, la serie converge $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ converge $\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} > 1$
 $\Leftrightarrow \alpha > 2$.

$$7c) \sum_{n \geq 1} a_n, \quad a_n = \frac{e^{\alpha n}}{n^2 + 1}. \quad \text{Si } \alpha > 0, \{a_n\} \not\rightarrow 0, \text{ luego la serie no converge}$$

Si: $\alpha < 0$, entonces $e^{\alpha n} < e^0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
 luego

$$\frac{e^{\alpha n}}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2}$$



La serie $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$ converge, luego $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{\alpha n}}{n^2 + 1}$ converge por comparación.

$$9a) \sum_{n \geq 0} x_n, \quad x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}. \quad \{x_n\} \not\rightarrow 0, \text{ luego la serie no converge.}$$

$$9b) \sum_{n \geq 3} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2 - 4}}$$

Veamos en primer lugar que la serie no converge absolutamente:

$$\sum_{n \geq 3} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2 - 4}} \right| = \sum_{n \geq 3} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 4}}. \quad \text{Comparamos con} \quad \sum_{n \geq 1} 1/n.$$

$$\frac{1/\sqrt{n^2-4}}{1/n} = \frac{n}{\sqrt{n^2-4}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}} \rightarrow 1, \text{ luego } \sum_{n \geq 3} \frac{1}{\sqrt{n^2-4}} \text{ no converge}$$

porque $\sum_{n \geq 1} 1/n$ no converge

Veamos que sí es convergente por el criterio de Leibniz.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2-4}} \right\} \rightarrow 0, \text{ así que solo necesitamos ver que es decreciente.}$$

Sea $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-4}} \quad n \in \mathbb{N}$. De forma manifiesta tenemos:

$$0 < n < n+1 \Rightarrow n^2 < (n+1)^2 \Rightarrow n^2-4 < (n+1)^2-4. \text{ Como } n \geq 3, \text{ entonces}$$

$$0 < n^2-4 < (n+1)^2-4 \Rightarrow \sqrt{n^2-4} < \sqrt{(n+1)^2-4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2-4}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2-4}}$$

$$\Rightarrow a_n > a_{n+1} \quad \forall n \geq 3.$$

10. Sea $a_n \geq 0$ con $\{a_n\} \rightarrow L > 1$. Probar que la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_1 \cdots a_n}$ es convergente.

$$\text{Sea } A_n = \frac{1}{a_1 \cdots a_n} = \frac{1}{\prod_{k=1}^n a_k} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aplicamos el criterio del cociente:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{a_1 \cdots a_n}{a_1 \cdots a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}} \rightarrow \frac{1}{L} < 1$$

entonces la serie converge.

11. a) Si $a_n > 0$ y $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} a_n^2$ converge

Verdadero. Si $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge $\Rightarrow \{a_n\} \rightarrow 0 \Rightarrow$ tomando $\varepsilon = 1$

encontramos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < 1$ para $n \geq n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n^2 < a_n \quad \forall n \geq n_0$. Por comparación, $\sum_{n \geq 1} a_n^2$ converge.

b) $a_n > 0$ y $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n}$ diverge.

Verdadero; $\frac{1}{a_n} \rightarrow +\infty$ luego no tiende a cero.

c) $\{a_n\} \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$ converge

Falso: $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\} \rightarrow 0$ pero $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

d) $a_n > 0$, $\{a_n\}$ monótona y no acotada $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n^n}$ converge

$\{a_n\} \rightarrow +\infty \Rightarrow \left\{ \frac{1}{a_n} \right\} \rightarrow 0$. Usamos el criterio de la raíz:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_n^n}} = \frac{1}{a_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{la serie converge.}$$

e) $a_n > 0 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \left(\frac{a_n}{2a_{n+1}} \right)^n$ converge

Verdadero; $a_n < a_{n+1}/2 = \frac{1}{2} (2a_{n+1}) \Rightarrow \frac{a_n}{2a_{n+1}} < \frac{1}{2}$

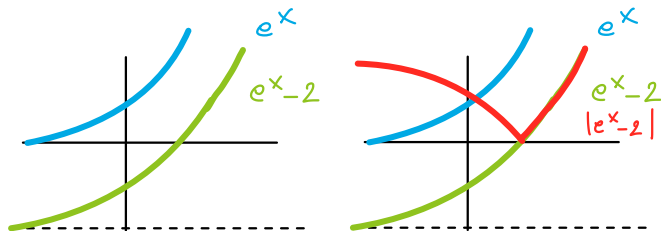
$\Rightarrow \left(\frac{a_n}{2a_{n+1}} \right)^n < \left(\frac{1}{2} \right)^n$, por lo tanto converge por comparación

con

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Tema 4: Funciones continuas

Hoja 4, 3a) $f(x) = |e^x - 2|$



$$\begin{aligned} |e^x - 2| &= |e^y - 2| \\ \begin{cases} e^x - 2 = 2 - e^y \Rightarrow e^x + e^y = 4 \\ e^x - 2 = e^y - 2 \Rightarrow e^x = e^y \Rightarrow x = y \end{cases} \\ x &= \log 3, y = 0 \\ |e^{\log 3} - 2| &= 1 \\ |e^0 - 2| &= |-1| = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ No es inyectiva.

Hoja 4, ejercicio 8d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2}$. Sea $\{x_n\} \rightarrow 2$, $x_n \neq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Como $\{x_n\} \rightarrow 2$, para n suficientemente grande, $x_n > 0$, luego es legítimo multiplicar y dividir por $2x_n \neq 0$.

$$\frac{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{2}}{x_n - 2} = \frac{\frac{2 - x_n}{2x_n}}{\frac{2x_n(x_n - 2)}{2x_n}} = \frac{-1}{2x_n} \rightarrow -\frac{1}{4}$$

8c $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+5-9}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x+5}+3} = \frac{1}{6}$

9-10 $g(x)$ Estudiar la continuidad de $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ e^x & \text{si } 0 < x \leq 3, \\ 2e & \text{si } x > 3, \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en $a \in \mathbb{R}$ distinguiendo casos:

① $a \in (-\infty, 0)$. Sea $B = (-\infty, 0)$. Tenemos que $a \in B$ y los puntos de $\mathbb{R}$ cerca de a se quedan en B .



Como $g|_B(x) = -x+1$, que es continua en a por ser polinómica, entonces g es continua en a .

② Si $a \in (0,3)$, elegimos $B = (0,3)$ y tenemos que $g|_B(x) = e^x$, que es continua en a . Como los puntos de $\mathbb{R}$ cerca de a son puntos de B , g es continua en a .

③ Si $a \in (3,+\infty)$, g es continua por ser constante en $(3,+\infty)$

Quedan por ver los puntos 0 y 3 . $f(0) = 1$, $f(3) = e^3$

Vemos los límites laterales en 0 :

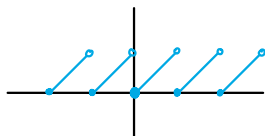
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x+1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dos límites existen y coinciden} \\ \text{con } f(0) = 1, \text{ luego es continua.} \end{array}$$

Por otro lado, $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 2e = 2e \neq f(3)$, luego g

no es continua en 3

16 Sea $Lx] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$. Estudiar la continuidad de las funciones:

a) $f(x) = x - Lx]$



Distinguimos casos según $a \in \mathbb{Z}$ o $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

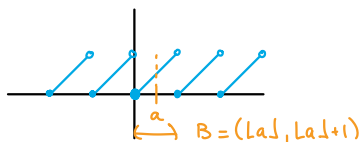
Sea $a \in \mathbb{Z}$. Entonces $f(a) = a - a = 0$.

Sin embargo, tomando $x_n = a - \frac{1}{2n}$, que es una sucesión tal que $\{x_n\} \rightarrow a$ con $Lx_n] \neq a \ \forall n \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$f(x_n) = a - \frac{1}{2n} - \lfloor a - \frac{1}{2n} \rfloor = a - \frac{1}{2n} - (a-1) = 1 - \frac{1}{2n} \rightarrow 1 \ (\neq 0),$$

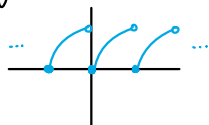
luego f no es continua en a .

Sea ahora $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Tomamos $B = (L a], L a] + 1)$. Tenemos $a \in B$ y además los puntos cerca de a no se salen de B .



$f|_B(x) = x - L a]$, que es continua en a
 $\uparrow$ continua $\uparrow$ constante $\Rightarrow f$ continua en a .

b) $f(x) = \sqrt{x - L x]$ Le ocurre igual que a la anterior



En $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ es continua porque $x - L x]$ lo es, y también $\sqrt{\cdot}$.

En $\mathbb{Z}$ se ve que no es continua de la misma forma que la anterior.

Tema 5 - Funciones derivables

Ejercicio 7 Esta regla viene de derivar la composición $\log(f(x))$, suponiendo que f devuelve valores positivos:

$$(\log f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x) \Rightarrow f'(x) = f(x) (\log f(x))'$$

a) $f(x) = \underbrace{(x^2+1)}_{>0} \underbrace{(e^x+1)}_{>0} \underbrace{(\cos x + \sin x)}_{>0 \text{ } (\geq 1/2, \text{ es un buen ejercicio probarlo})}$

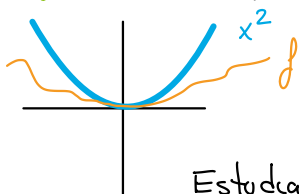
$$\log f(x) = 7 \log(x^2+1) + \log(e^x+1) + \log(\cos x + \sin x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) (\log f(x))' = 7 \frac{2x}{x^2+1} + \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$$

b) $g(x) = (x^2+1)^{x^2+1}$ $g'(x) = g(x) ((x^2+1) \log(x^2+1))' =$
 $= g(x) \left(2x \log(x^2+1) + (x^2+1) \frac{2x}{x^2+1} \right)$

$$b) \quad h(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x) \Rightarrow h'(x) = h(x) (\log h(x))' = h(x) \left(\sum_{k=1}^n \log f_k(x) \right)' \\ = h(x) \left(\sum_{k=1}^n \frac{f_k'(x)}{f_k(x)} \right) = \prod_{i=1}^n f_i(x) \left(\sum_{k=1}^n \frac{f_k'(x)}{f_k(x)} \right).$$

Ejercicio 3 $|f(x)| \leq x^2$ en $(-\delta, \delta)$ con $\delta > 0$. Calcular $f'(0)$.



Evalutando en $x=0$ tenemos $|f(0)| \leq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(0) = 0.$

Estudiamos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$

Hacemos un sándwich:

$$0 \leq \left| \frac{f(x)}{x} \right| = \frac{|f(x)|}{|x|} \leq \frac{x^2}{|x|} = |x| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$$

Entonces, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = 0.$

Ejercicio 4 Sea $g(x) = x^2 \sin(1/x)$ para $x \neq 0$. Ver que $g'(0) = 0$, definiendo previamente g en 0.

Por supuesto, para tener derivabilidad necesitamos primero continuidad, así que

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x^2}_{\substack{\downarrow 0 \\ \text{acotado}}} \sin(1/x) = 0.$$

← misma razón.

Visto esto,

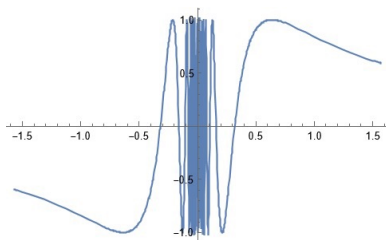
$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$$

En cambio, $x \sin(1/x)$ no es derivable en 0, ya que

$$\frac{x \sin(1/x) - 0}{x - 0} = \sin(1/x), \text{ que no tiene límite en } 0.$$

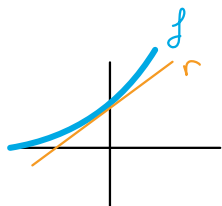
← Valor para que sea continua en 0.

$\sin(1/x)$ cuando $x \rightarrow 0^+$ es como $\sin y$ cuando $y \rightarrow +\infty$,
y cuando $x \rightarrow 0^-$ es como $\sin y$ cuando $y \rightarrow -\infty$.



discontinuidad de segunda especie

Ejercicio 11 Considerando la tangente a la gráfica de e^x en $(0,1)$, deducir la desigualdad $1+x \leq e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.



Gráficamente, vemos que $f(x) \geq r(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Calculamos la ecuación de la recta tangente en $(0,1)$ usando la punto-pendiente

$$r(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = e^0 + e^0 x = 1+x.$$

$$\Rightarrow e^x \geq 1+x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 12: Tenemos $\sum_{k=0}^m x^k = \frac{x^{m+1}-1}{x-1}$. Usar la fórmula para calcular

$$a) \sum_{k=1}^{15} k 2^k$$

$$b) \sum_{k=1}^{15} k^2 2^k$$

Derivamos la fórmula una vez:

$$\sum_{k=1}^m k x^{k-1} = \frac{(m+1)x^m(x-1) - (x^{m+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{mx^{m+1} - (m+1)x^m + 1}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^m k x^k = x \frac{(m x^{m+1} - (m+1)x^m + 1)}{(x-1)^2}$$

Para $m=15$ y $x=2$
obtenemos el valor
917506

Para el b) derivamos otra vez.

Ejercicio 14 Sinh: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Probar que su inversa ($\operatorname{arcsinh}$) es derivable con derivada $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

$\sinh$ es derivable en $\mathbb{R}$ con $\sinh'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, luego $\sinh$ es estrictamente creciente, luego inyectiva.

Además, $\sinh(x) \rightarrow \pm\infty$ ($x \rightarrow \pm\infty$), luego $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, y existe su inversa $\operatorname{arcsinh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La derivamos usando la fórmula de la derivada de la función inversa:

$$\operatorname{arcsinh}'(y) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arcsinh}(y))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh}(y))},$$

siendo $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Observamos que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, luego

$$\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x} \quad (\text{Tomamos la } \sqrt{\text{positiva porque } \cosh > 0 \text{ siempre}})$$

$$\text{Entonces} \quad \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh}(y))} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh(\operatorname{arcsinh}(y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

21. Usando los teoremas de Bolzano y de Rolle, demostrar que cada una de estas ecuaciones tiene una sola raíz real.

a) $x^5 + 14x + 31 = 0$

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^5 + 14x + 31$. f es continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica, así que basta con encontrar dos puntos con imágenes de distinto signo para asegurar que hay un cero en medio.

$$f(0) = 31 > 0, \quad f(-2) = -29 \Rightarrow \exists c \in (-2, 0) \text{ tal que } f(c) = 0.$$

Veamos ahora la derivada: $f'(x) = 5x^4 + 14 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, luego f es estrictamente creciente en $\mathbb{R} \Rightarrow$ inyectiva, así que hay a lo sumo un único c con $f(c) = 0$.

Usando el teorema de Rolle: si hubiera otro punto c^* , $c^* \neq c$, tal que $f(c^*) = 0$, el T^a de Roll nos daría un punto d , entre c y c^* , tal que $f'(d) = 0$. Sin embargo, hemos visto que $f' \neq 0$ siempre.

$$b) \quad 3x - 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0.$$

Sea $g(x) = 3x - 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Vemos que

$$g(0) = -1 < 0, \quad g(1) = 1 > 0 \Rightarrow \exists c \in (0, 1) \text{ con } g(c) = 0.$$

Por otro lado, $g'(x) = 3 - \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \geq 3 - \frac{\pi}{2} > 0$, luego la solución es única por la misma razón de antes.

25 c) Hallar el valor del límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}, \quad a, b > 0$$

Usamos la definición de potencia:

$$\left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x} \log\left(\frac{a^x + b^x}{2} \right) \right)$$

Estudiamos este límite usando la regla de l'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)}{\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} (a^x \log a + b^x \log b)}{\frac{a^x + b^x}{2}} = \frac{\log a + \log b}{2}$$

$\rightarrow \log 1 = 0$
 $\rightarrow 0$
 $x' = 1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\text{Entonces, } \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} \rightarrow e^{\frac{\log a + \log b}{2}} = \sqrt{a} \sqrt{b}.$$

Ejercicio 27. Calcular el máximo de $N(t) = 1 + (3-t)^2 e^{-t}$ para $t \geq 0$ y su valor en $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (1 + (3-t)^2 e^{-t}) = 1 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(3-t)^2}{e^t} = 1.$$

Para el último límite hemos usado la regla de l'Hôpital dos veces.

Buscamos ahora el máximo de la función. Como $[0, +\infty)$ no es cerrado y acotado, podría no existir.

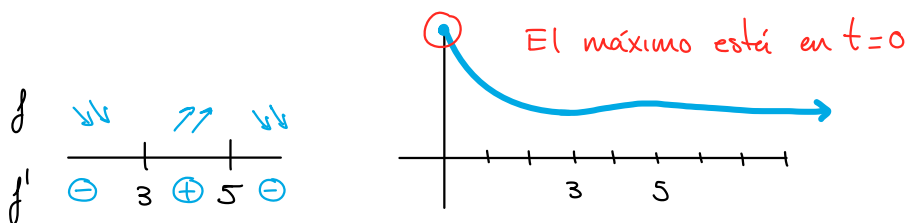
- Puntos frontera: $t=0$ $N(0) = 10$
- Puntos críticos:

$$N'(t) = -2(3-t)e^{-t} - e^{-t}(3-t)^2 = 0 \Leftrightarrow -e^{-t}((3-t)^2 + 2(3-t)) = 0$$

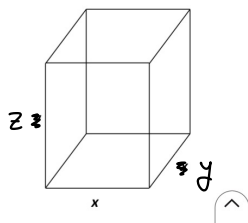
$$\Leftrightarrow -e^{-t}(3-t)(5-t) = 0 \Leftrightarrow t \in \{3, 5\}$$

$$N(3) = 1, \quad N(5) = 1 + \frac{4}{e^5} = 1.02...$$

- Puntos de no derivabilidad: ninguno



30. Una empresa recibe el encargo de construir cajas con forma de paralelepípedo de modo que la base sea un cuadrado. El material que se usa para la base y la tapa superior tiene un coste de 2 euros por m^2 , mientras que el material utilizado para las paredes laterales tiene un coste de 8 euros por m^2 . Además, el volumen de las cajas debe ser $0.25 m^3$. ¿Cuáles deben de ser las dimensiones de la caja para tener un coste mínimo?



$$\left. \begin{array}{l} \text{Volumen: } xyz = \frac{1}{4} \\ \text{La base es un cuadrado: } x = y \end{array} \right\} z = \frac{1}{4x^2}$$

Queremos minimizar la función coste:

$$f(x, y, z) = 2 \cdot 2 \cdot xy + 8 \cdot 2 \cdot xz + 8 \cdot 2 \cdot yz$$

Usamos la información que tenemos:

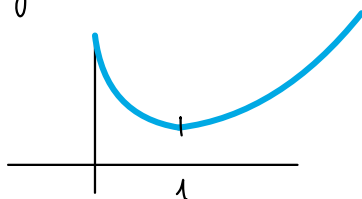
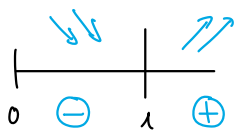
$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 4x^2 + 16 \frac{1}{4x} + 16 \frac{1}{4x} = 4 \left(x^2 + \frac{2}{x} \right) \\ &= 4 \left(x^2 + \frac{2}{x} \right) \end{aligned}$$

Se trata de minimizar la función $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ para $x \geq 0$. Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = 2 \left(x - \frac{1}{x^2} \right).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



Tiene un mínimo cuando $x=1$ ($\Rightarrow y=1, z=1/4$).

Hoja 5 - Ejercicio 34 Hallar los polinomios de Taylor de grados 1 y 2 de $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 16$ y usarlo para aproximar $\sqrt{16.2}$, estimando el error cometido. Repetir la estrategia para $\log 8/10$.

a) f es $C^\infty(0, +\infty)$, así que podemos considerar su polinomio de Taylor centrado en $a=16$:

$$T_2[f, 16](x) = f(16) + f'(16)(x-16) + \frac{f''(16)}{2}(x-16)^2 = 4 + \frac{1}{8}(x-16) - \frac{1}{512}(x-16)^2.$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4} \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad f'(16) = \frac{1}{8}, \quad f''(16) = -\frac{1}{256}$$

El valor aproximado que obtenemos es $T_2[f, 16](16.2) = 4'024921875$

Usando la fórmula de Taylor, el error cometido es igual a

$$R_2[f, 16](16.2) = \frac{f'''(c)}{6} 0.2^3, \text{ para algún } c \in (16, 16.2)$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8} \frac{1}{x^2 \sqrt{x}} \Rightarrow f'''(c) < \frac{3}{8} \frac{1}{16^2 \sqrt{16}} = 0'00036.$$

$$\text{Por tanto, } R_2[f, 16](16.2) < \frac{3}{48} \frac{1}{16^2 \cdot 4} 0.2^3 = 4'8 \times 10^{-7}.$$

Para dar una cota superior para el error, usamos el $c \in (16, 16.2)$ que maximice la expresión de $R_2[f, 16]$. En este caso, $c = 16$.

b) Encontraremos el polinomio en $x=1$. Como conocemos la serie de Taylor, el polinomio de grado 2 de $\log x$ es:

$$\begin{aligned} T_2[\log, 1](x) &= \log 1 + \sum_{n=1}^2 \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 1^n} (x-1)^n \\ &= (x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2 \end{aligned}$$

La aproximación de $\log 0.8$ proporcionada es $T_2[\log, 1](0.8) = -0.22$.
El error cometido en este caso es

$$\frac{f'''(c)}{6} (0.8-1)^3 = \frac{-0.2^3}{3 \cdot c^3} \text{ para algún } c \in (0.8, 1),$$

Este error es negativo, por lo que suele tomarse su valor absoluto para tener una idea más intuitiva de la diferencia entre $f(x)$ y $T_2[f, a](x)$.

$$|R_2[\log x, 1](0.8)| = \frac{0.2^3}{3 \cdot c^3} \leq \frac{0.2^3}{3 \cdot 0.8^3} = 0'0052...$$

$c = 0.8$ maximiza este error

Hoja 5-36. Hallar la serie de Taylor de $(x^2-3x)e^{x^4}$ en $a=0$ a partir de la de e^x y usarla para calcular $f^{(5)}(0)$ y $f^{(10)}(0)$.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{n!}$$

$$\Rightarrow x(x-3)e^{x^4} = (x-3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{4n+2}}{n!} - 3 \frac{x^{4n+1}}{n!} \right)$$

Sabemos que $\frac{f^{(5)}(0)}{5!}$ es el coeficiente de la potencia x^5 ,

$$\text{esto es, } \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{-3}{1!} \Rightarrow f^{(5)}(0) = -3 \cdot 5!$$

$$\text{De la misma forma, } f^{(10)}(0) = 10! \cdot \frac{1}{2}.$$

Hoja 5- Ejercicio 37. Calcular las series de Taylor en $a=0$ e indicar donde convergen

$$a) f(x) = x \log(1+x^2).$$

El desarrollo del logaritmo en $a=1$ es el siguiente:

$$\log y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (y-1)^n, \text{ para } y \in (0,2]$$

Entonces, tomando $y = 1+x^2$ (que obliga a que $x \in [-1,1]$), tenemos

$$x \log(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n+1} \quad x \in [-1,1].$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

$$\text{Usaremos que } \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Entonces, para $x \neq 0$:

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

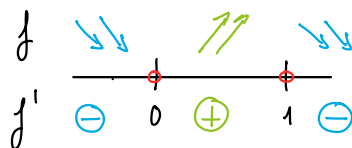
Para todo $n \in \mathbb{N}$ esta expresión tiene límite en 0 y f es continua en 0, así que

f es $C^\infty(\mathbb{R})$ y su serie de Taylor es válida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Hoja 5 - Ejercicio 32 f) Esbozar la gráfica de $f(x) = e^{\frac{|x|}{|x-1|}}$

f es una función continua para $x \neq 1$ y, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, es derivable con derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{|x|}{|x-1|}} \left(\frac{|x|}{|x-1|} \right)' = e^{\frac{|x|}{|x-1|}} \frac{\frac{|x|}{x} |x-1| - |x| \frac{|x-1|}{x-1}}{(x-1)^2} \\ &= e^{\frac{|x|}{|x-1|}} \frac{|x(x-1)| (x-1) - |x(x-1)| x}{x(x-1)^3} = \frac{-|x(x-1)|}{x(x-1)^3} \end{aligned}$$



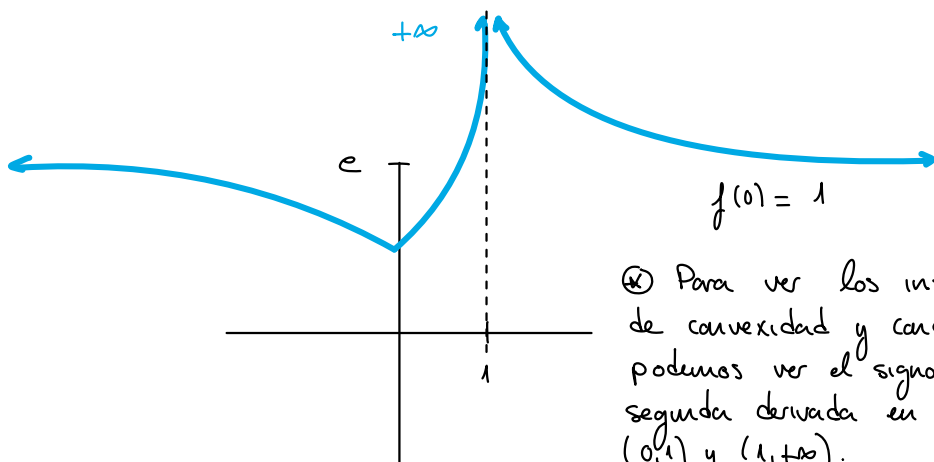
no hay derivada en 0, 1.

Estudiamos los límites en $\pm\infty$ y 1, buscando asíntotas:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{|x|}{|x-1|}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{x-1}} = e \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{|x|}{|x-1|}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{-x}{-x+1}} = e \end{aligned} \right\} \text{ asíntotas horizontales}$$

$$\text{Si } x > 1, \quad e^{\frac{|x|}{|x-1|}} = e^{\frac{x}{x-1}} \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow 1^+$$

$$\text{Si } 0 < x < 1, \quad e^{\frac{|x|}{|x-1|}} = e^{\frac{x}{1-x}} \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow 1^-.$$



⊗ Para ver los intervalos de convexidad y concavidad, podemos ver el signo de la segunda derivada en $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Tema 6: Cálculo integral

$$\textcircled{1} \quad a) \int (x^2 + 3x) \left(5x^3 - \frac{8}{x^3} \right) dx = \int \left(5x^5 - \frac{8}{x} + 15x^4 - \frac{24}{x^2} \right) dx$$

$$= \frac{5}{6} x^6 - 8 \log |x| + 3x^5 + 24 \frac{1}{x} + C$$

$$b) \int \left(e^x (e^x - e^{-x}) + \frac{1}{5x-2} \right) dx = \int \left(e^{2x} - 1 + \frac{1}{5x-2} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} 2e^{2x} - 1 + \frac{1}{5} \frac{5}{5x-2} \right) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - x + \frac{1}{5} \log |5x-2| + C$$

$$c) \int \left(3 \sin(5x) - \frac{x}{2} - \frac{5}{1+4x^2} \right) dx = \int \left(\frac{3}{5} 5 \sin(5x) - \frac{1}{2} \frac{1}{2} 2x - \frac{5}{2} \frac{2}{1+(2x)^2} \right) dx$$

$$= -\frac{3}{5} \cos(5x) - \frac{1}{4} x^2 - \frac{5}{2} \arctan(2x) + C$$

$$d) \int \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{2}{(4x+1)^2} + \frac{4}{\sqrt{1-2x^2}} \right) dx = \int \left(\frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2} 4(4x+1)^{-2} + \frac{4}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-(\sqrt{2}x)^2}} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \log(1+x^2) - \frac{1}{2} \frac{1}{4x+1} + \frac{4}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2}x) + C$$

$$\textcircled{2} \text{ a) } \int \underbrace{(x^2-2x)}_u \underbrace{e^{-5x+3}}_v dx = (x^2-2x) \left(\frac{-1}{5} e^{-5x+3} \right) + \frac{1}{5} \int (2x-2) e^{-5x+3} dx$$

$$u \rightarrow du = 2x-2 \quad dv = e^{-5x+3} \rightarrow v = \frac{-1}{5} e^{-5x+3}$$

$$\frac{1}{5} \int \underbrace{(2x-2)}_u \underbrace{e^{-5x+3}}_v dx = \frac{1}{5} (2x-2) \left(\frac{-1}{5} e^{-5x+3} \right) + \frac{1}{5} \frac{1}{5} 2 \int e^{-5x+3}$$

$$u \rightarrow du = 2 \quad dv \rightarrow v = \frac{-1}{5} e^{-5x+3}$$

$$\frac{2}{25} \int e^{-5x+3} = \frac{-2}{125} e^{-5x+3}$$

Las primitivas son $\frac{-1}{5} e^{-5x+3} \left(x^2-2x + \frac{1}{5} (2x-2) + \frac{2}{25} \right) + C$

$$\text{b) } \int \underbrace{x}_u \underbrace{\cos(5x)}_v dx = \frac{x}{5} \sin 5x - \frac{1}{5} \int \sin(5x) dx =$$

$$u=x \quad dv=\cos 5x \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{5} \sin(5x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + C$$

$$du=1 \quad v=\frac{1}{5} \sin 5x$$

$$\text{c) } \int \underbrace{e^{-x}}_u \underbrace{\sin x}_v dx = -\underbrace{e^{-x}}_u \underbrace{\cos x}_v - \int \underbrace{e^{-x}}_u \underbrace{\cos x}_v dx =$$

$$u=e^{-x} \quad dv=\sin x \quad \Rightarrow \quad du=-e^{-x} \quad v=-\cos x$$

$$u=e^{-x} \quad dv=\cos x \quad \Rightarrow \quad du=-e^{-x} \quad v=\sin x$$

$$= -e^{-x} \cos x - \bar{e}^{-x} \sin x - \int e^{-x} \sin x dx$$

$$\Rightarrow 2 \int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} (\cos x + \sin x)$$

$$\Rightarrow \int e^{-x} \sin x dx = \frac{-e^{-x} (\cos x + \sin x)}{2} + C$$

$$\text{d) } \int \underbrace{x}_u \underbrace{\sqrt{x+1}}_v dx = \frac{2}{3} x (x+1)^{3/2} - \int \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} dx$$

$$u=x \quad dv=\sqrt{x+1} \quad \Rightarrow \quad du=1 \quad v=\frac{2}{3} (x+1)^{3/2}$$

$$= \frac{2}{3} x (x+1)^{3/2} - \frac{4}{15} (x+1)^{5/2} + C$$

3 a) $\int \frac{x}{(x+1)(x-3)} dx$ Como el denominador tiene dos raíces simples, buscamos escribir

$$\frac{x}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \Rightarrow x = (x-3)A + (x+1)B \quad \begin{cases} 3 = 4B \\ -1 = -4A \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = 1/4 \quad y \quad B = 3/4.$$

$$\int \frac{x}{(x+1)(x-3)} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x-3} = \frac{1}{4} \log|x+1| + \frac{3}{4} \log|x-3| + C$$

b) $\int \frac{x^3+1}{x^3+x} dx$ $\frac{x^3+1}{x^3+x} \quad \frac{x^3+x}{-x^3-x} \quad \frac{x^3+x}{1} \Rightarrow x^3+1 = (x^3+x) + (-x+1)$

Estudiamos esta.

$$\int \frac{x^3+1}{x^3+x} dx = \int \left(1 + \frac{1-x}{x^3+x} \right) dx = x + \int \frac{1-x}{x(x^2+1)} dx.$$

no tiene raíces reales

Escribimos $\frac{1-x}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

$$\Rightarrow 1-x = A(1+x^2) + x(Bx+C). \quad \begin{cases} 1 = A \\ 0 = 2A + B + C \\ 2 = 2A + B - C \end{cases} \quad \begin{cases} -2 = 2C \\ C = -1 \end{cases}$$

Hemos visto que

$$\Rightarrow B = -1$$

$$\frac{1-x}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}, \text{ por lo tanto;}$$

$$\int \frac{1-x}{x(x^2+1)} dx = x + \log|x| - \frac{1}{2} \log|x^2+1| - \arctg x + C$$

c) $\int \frac{2}{(x-1)(x+3)^2} dx$. Escribimos $\frac{2}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$

$$\Rightarrow 2 = A(x+3)^2 + B(x+3)(x-1) + C(x-1)$$

$$\begin{matrix} -2+3 & -2-1 & -2-1 \\ -1 & -3 & -3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = -4C \Rightarrow C = -1/2 \\ 2 = 16A \Rightarrow A = 1/8 \\ 2 = A - 3B - 3C \Rightarrow 2 = 1/8 - 3B + 3/2 \Rightarrow B = -1/8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{(x-1)(x+3)^2} dx &= 1/8 \int \frac{1}{x-1} dx - 1/8 \int \frac{1}{x+3} dx - 1/2 \int \frac{1}{(x+3)^2} dx \\ &= 1/8 \log |x-1| - 1/8 \log |x+3| + \frac{1}{2} \frac{1}{x+3} + C \end{aligned}$$

$$(4) \int_0^{\pi/2} \sin^7 x \, dx = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x)^3 \sin x \, dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x)^3 \sin x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x) \sin x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx - \int_0^{\pi/2} 3\cos^2 x \sin x \, dx + 3 \int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin x \, dx$$

$$- \int_0^{\pi/2} \cos^6 x \sin x \, dx = \left[-\cos \right]_0^{\pi/2} + \left[\cos^3 x \right]_0^{\pi/2} - \frac{3}{5} \left[\cos^5 x \right]_0^{\pi/2}$$

$$+ \frac{1}{7} \left[\cos^7 x \right]_0^{\pi/2} = 1 - 1 + 3/5 - 1/7 = 16/35$$

5b) $f(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3} dt$. Como $(1+t^2)^{-3}$ es continua en $\mathbb{R}$, el TFC nos dice que tiene una primitiva $F(t)$. Entonces, por la regla de Barrow:

$$f(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3} dt = F(x^2) - F(0).$$

Por la regla de la cadena, $f'(x) = F'(x^2) 2x = (1+x^4)^{-3} 2x$

$$= \frac{2x}{(1+x^4)^3}$$

$$6) f(x) = \int_0^x |t| dt = \frac{1}{2} x |x| \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Hay dos métodos:

$$\text{Si } x > 0, \int_0^x |t| dt = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2} \quad \left| \quad \frac{1}{2} x |x| = \frac{x^2}{2} \right.$$

$$\text{Si } x < 0, \int_0^x |t| dt = \int_0^x -t dt = -\frac{x^2}{2} \quad \left| \quad \frac{1}{2} x |x| = -\frac{x^2}{2} \right.$$

Podemos ver que $f(x) - \frac{1}{2} x |x|$ tiene derivada cero:

$$(f(x) - \frac{1}{2} x |x|)' = f'(x) - \frac{1}{2} (|x| + x \frac{|x|}{x}) = f'(x) - |x| = 0,$$

luego $f(x) - \frac{1}{2} x |x|$ es constante, y por tanto vale siempre lo que valga, por ejemplo, en $x=0$:

$$f(0) - 0 = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} x |x|.$$

$$8) \int_0^1 \frac{1}{e^x + 4e^{-x}} dx = \int_1^e \frac{1/t dt}{t + 4 \frac{1}{t}} = \int_1^e \frac{dt}{t^2 + 4}$$

$$t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx = t dx$$

$$x=0 \Rightarrow t=1, \quad x=1 \Rightarrow t=e$$

$$= \frac{1}{4} 2 \int_1^e \frac{1/2}{1 + (\frac{t}{2})^2} dt = \frac{1}{2} (\arctg(e/2) - \arctg(1/2))$$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} \frac{(t^2-1)^2}{t} \frac{2t}{t^2-1} dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} (2t^2-2) dt$$

$$t = \sqrt{e^x + 1} \Rightarrow dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x + 1}} dx = \frac{t^2-1}{2t} dx \Rightarrow dx = \frac{2t}{t^2-1} dt$$

$$x=0 \Rightarrow t = \sqrt{2}, \quad x=1 \Rightarrow t = \sqrt{e+1}$$

$$= \left[\frac{2}{3} t^3 - 2t \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} = \frac{2}{3} (e+1)^{3/2} - 2\sqrt{e+1} - \frac{2}{3} 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$

$$= \frac{2}{3} \left(\sqrt{2} + (e-2)\sqrt{1+e} \right).$$

$$c) \int_0^1 \frac{4^x + 1}{2^x + 1} dx = \frac{1}{\log 2} \int_1^2 \frac{t^2 + 1}{(t+1)t} dt =$$

$$t = 2^x \Rightarrow dt = 2^x \log 2 dx = \log 2 \cdot t dx$$

$$x=0 \Rightarrow t=1 \quad x=1 \Rightarrow t=2$$

$$= \frac{1}{\log 2} \int_1^2 \frac{t^2 + t - t + 1}{t^2 + t} dt = \frac{1}{\log 2} \int_1^2 1 dt + \frac{1}{\log 2} \int_1^2 \frac{1-t}{t^2+t} dt$$

$$\frac{1-t}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} \Rightarrow 1-t = A(t+1) + Bt \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-2 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 2} \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t+1} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 2} \left[\log t - 2 \log(t+1) \right]_1^2 = \frac{1}{\log 2} \left(1 + \log 2 - 2 \log 3 + 2 \log 2 \right)$$

$$= \frac{1}{\log 2} \left(1 + 3 \log 2 - \log 9 \right) = \frac{1}{\log 2} \left(1 + \log \frac{8}{9} \right)$$

$$d) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2} \left[\log(x + \sqrt{x^2+1}) \right]_0^1 =$$

$$t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$$

$$x=0 \Rightarrow t=0$$

$$x=1 \Rightarrow t=1$$

7. Supongamos que f es derivable y

$$\int_0^x f(t) dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x$$

Calcular $f'(\pi/4)$ y $f(\pi/4)$

Por el TFC, esta función de área es derivable y su derivada es $f(x)$. Lo que nos da el ejercicio es una primitiva de f .

Derivando: $f(x) = 2x + \cancel{\sin 2x} + 2x \cos 2x - \cancel{\sin 2x}$
 $\Rightarrow f(\pi/4) = \pi/2$

$$f'(x) = 2 + 2 \cos 2x - 4x \sin 2x$$

$$f'(\pi/4) = 2 - \pi$$

Ejercicio 17

Rotemos la gráfica de $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$ alrededor del eje y . Probar que la figura encierra volumen finito pero el área lateral es infinita.

$$V = \int_1^{+\infty} \pi \frac{1}{x^2} dx = \pi \left[\frac{-1}{x} \right]_1^{+\infty} = \pi$$

$$S = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \underbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}_{\geq 1} dx \geq 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = 2\pi [\log x]_1^{+\infty} \rightarrow +\infty.$$

Entonces, $S = +\infty$ por comparación.

Ejercicio 20 a)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$$

Buscamos que aparezca $1/n$ y $f(k/n)$ para alguna f .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n(1 + \frac{k}{n})}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1 + k/n}} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}. \end{aligned}$$

Entonces el límite es

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = \left[2\sqrt{1+x} \right]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2.$$

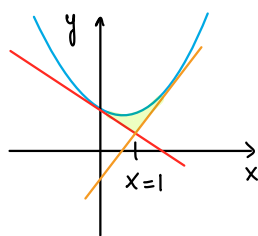
20b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)k}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) \frac{k}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f(t/k)$

para $f(x) = (1-x)x$. Entonces converge a

$$\int_0^1 (x-x^2) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Ejercicio 12

Sea $f(x) = x^2 - 2x + 7$ y T el triángulo limitado por la gráfica de f y las tangentes en $x=0$ y $x=2$. Calcular el área de T .



tangente en $x=0$: $T_1(x) = f(0) + f'(0)x = 7 - 2x$

tangente en $x=2$: $T_2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) = 7 + 2(x-2)$

Punto de corte: $7 - 2x = 7 + 2x - 4 \Rightarrow x = 1$

En $[0,1]$ debemos integrar $f(x) - T_1(x)$
en $[1,2]$ debemos integrar $f(x) - T_2(x)$

$$\text{área} = \int_0^1 (x^2 - 2x + 7 - 7 + 2x) dx + \int_1^2 (x^2 - 2x + 7 - 7 - 2(x-2)) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

15. Calcular las siguientes integrales impropias.

b) $\int_0^1 \log x dx$. Como $\log x$ tiene límite en 1, solo es impropia en 0. Calculamos una primitiva integrando por partes

$$\int 1 \cdot \log x \, dx = x \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x.$$

$$dv = 1 \Rightarrow v = x$$

$$\log x = u \Rightarrow \frac{1}{x} = du$$

Entonces;

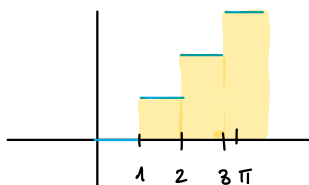
$$\int_0^1 \log x \, dx = \left[x \log x - x \right]_0^1 = -1 - \lim_{x \rightarrow 0} (x \log x - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \log \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\log x}{x} = 0.$$

Entonces,

$$\int_0^1 \log x \, dx = -1$$

10 b) Área de la región limitada por el intervalo $[0, \pi]$ del eje x y la gráfica de $f(x) = Lx \cdot 1$.

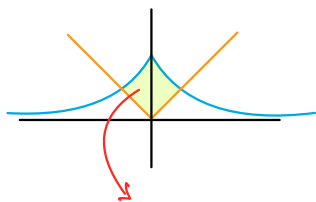


$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} Lx \cdot 1 \, dx &= \int_0^1 0 \, dx + \int_1^2 1 \, dx + \int_2^3 2 \, dx + \int_3^{\pi} 3 \, dx \\ &= 1 + 2 + 3(\pi - 3) = 3(\pi - 2). \end{aligned}$$

11. Hallar el área limitada entre las gráficas de

$$f(x) = \frac{2}{4x^2 + 1}$$

$$g(x) = 2|x|$$



Encontramos los puntos de corte: $\frac{1}{4x^2 + 1} = |x|$

$$\text{Si } x > 0: 1 = 4x^3 + x \Leftrightarrow 4x^3 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2.$$

$$\text{Si } x < 0: 1 = -4x^3 - x \Leftrightarrow 4x^3 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1/2.$$

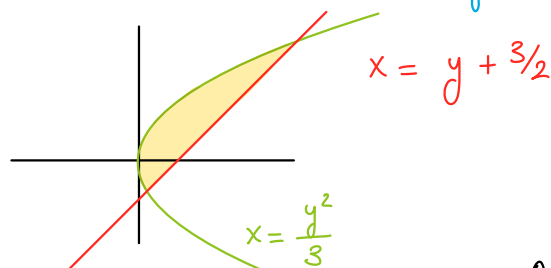
$$A = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{2}{4x^2 + 1} - 2|x| \right) dx = \int_{-1/2}^0 \left(\frac{2}{4x^2 + 1} + 2x \right) dx$$

$$+ \int_0^{1/2} \left(\frac{2}{4x^2 + 1} - 2x \right) dx = \left[\arctan 2x + x^2 \right]_{-1/2}^0 + \left[\arctan 2x - x^2 \right]_0^{1/2}$$

Queremos calcular este área

$$= -\operatorname{arctg}(-1) - \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

13. Área entre la curva $y^2 = 3x$ y la recta $2y - 2x + 3 = 0$



las vemos como gráficas con abscisas y y ordenadas x .

Encontramos los puntos de corte:
 $y + 3/2 = \frac{y^2}{3} \Rightarrow y^2 - 3y - 9/2 = 0$
 $\Rightarrow y = \frac{3}{2} (1 \pm \sqrt{3}) = r_{\pm}$

$$A = \int_{r_-}^{r_+} \left(y + \frac{3}{2} - \frac{y^2}{3} \right) dy =$$

$$= \left[\frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}y - \frac{y^3}{9} \right]_{r_-}^{r_+} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

⊛ Sea $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $G(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.
 Estudiar la monotonía de g y sus extremos relativos.

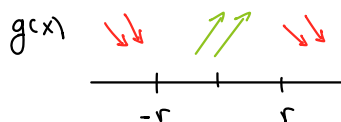
La función $f(t) = e^{-t^2}$ es continua en $\mathbb{R}$ luego admite una primitiva $F \in D(\mathbb{R})$ por el TFC

Por la regla de Barrow, $g(x) = F(2x) - F(x)$, luego

$$g'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2} (2e^{-3x^2} - 1)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-3x^2} = 1/2 \Leftrightarrow -3x^2 = -\log 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{\log 2}{3} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{\log 2}{3}} = \pm r \quad (\text{Notación})$$



$g'(x)$ $\ominus$ $\oplus$ $\ominus$
 mínimo relativo en $-r$ máximo relativo en r

Entonces g es decreciente en $(-\infty, -r)$, creciente en $(-r, r)$ y decreciente en $(r, +\infty)$.

$$16a) \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n \log(n) \log(\log n)}$$

Para $x \geq 3$, las funciones del denominador son crecientes y positivas luego el término general es decreciente.

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \log x \log(\log x)} \stackrel{t = \log x}{=} \int_{\log 3}^{+\infty} \frac{dt}{t \log t} \stackrel{s = \log t}{=} \int_{\log(\log 3)}^{+\infty} \frac{ds}{s}$$

$$\int_{\log(\log 3)}^{+\infty} \frac{ds}{s} = \left[\log s \right]_{\log(\log 3)}^{+\infty} \rightarrow +\infty,$$

luego la serie no converge.